5 İNTEGRALLER

Değişim oranı, teğet doğruların eğimi, türev üzerinde çalışmalar yaptık. Bu çalışmalara diferansiyel kalkülüs deniyor. Bu çalışmaların diğer tarafında integral kalkülüs var. Alanlar, hacimlerin hesaplanması bu kısma giriyor. Teğet doğruların eğimini bulma ile eğriler altındaki alanları bulma birbirinden ilgisiz görünsede, Newton ve Leibniz, sezgisel olarak aralarındaki bağlantıyı görmüşlerdir. Bu bağlantının keşfi, Temel Teoremler, diferansiyel ve integral kalkülüsün birlikte tek çok önemli araç olduğunu ortaya çıkarmıştır.

4.7 Belirsiz İntegral (Ters Türevler)

Tanım: f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. I'deki her x için

$$F'(x) = f(x)$$

ise I'da f'nin bir <u>ters türevi</u> F fonksiyonudur.

Örnek: a) $f(x)=2x$ fonksiyonunun bir ters türevi $F(x)=x^2$ dir.

b) $g(x)=\sin x$ " " " " $G(x)=-\cos x$ dir.

c) $h(x)=2x+\sin x$ " " " " $H(x)=x^2-\cos x$ dir.

$f(x)=2x$ fonksiyonunun ters türevi, yalnız $F(x)=x^2$ değildir. x^2+1, $x^2-\sqrt{2}$ ve c sabit olmak üzere x^2+c'de $f(x)$'in ters türevleridir. Başkaları var mıdır? ODT'nin 2. sonucuna göre, bir fonksiyonun iki farklı ters türevi sabit farkıyla eşittir. Yani, c keyfi sabit olmak üzere x^2+c fonksiyonları, $f(x)=2x$'in bütün ters türevleridir.

Tanım: f'nin bütün ters türevlerinin kümesi, x'e göre f'nin <u>belirsiz</u> (teknik) <u>integralidir</u> ve $\int f(x)dx$ ile gösterilir. $\int$ sembolüne <u>integral işareti</u>, f fonksiyonuna <u>integrand</u> ve x'e <u>integrasyon değişkeni</u> denir.

Eger, f'nin bir ters türevini biliyorsak, ODT'nin 2. sonucuna göre

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

şeklinde yazarız. C'ye integral sabiti denir.

Örnek: a) $\int 2x\,dx = x^2 + c$

b) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

Birçok fonksiyonun türevini bildiğimizden ve integralde türev işleminin bir ters işlemi olduğundan birçok fonksiyonun integralini, doğrudan bilmiş oluruz:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$, n rasyonel, $\int dx = \int 1\,dx = x + c$ (özel durum)
2) $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$
3) $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + c$
4) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
5) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$
6) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
7) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

Örnek: a) $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$ b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{2/3} + c$

c) $\int \cos(3x)dx = \frac{\sin(3x)}{3} + c$

d) $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$ doğru mudur?

$\frac{d}{dx}(x\sin x + \cos x + c) = \sin x + x\cos x - \sin x + 0 = x\cos x$ ✓.

İntegral Kuralları; Değişken Değiştirme

Türevle ilgili, $(kf(x))' = kf'(x)$ ve $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ lineer özellikleri biliyoruz. Belirsiz integral, türev işleminin ters işlemi olduğundan;

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \int k f(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad (k \text{ sabit}),\quad \int -f(x)dx = -\int f(x)dx \quad (k=-1) \\ 2)\ \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \end{array}}$$

Örnek: a) $\int 3\sec^2 x\,dx = 3\int \sec^2 x\,dx = 3(\tan x + c) = 3\tan x + c' \quad (c' = 3c)$

b) $\int (x^4 - 3x^2 + 4)dx = \int x^4 dx - 3\int x^2 dx + 4\int dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + 4x + c.$

$\sin^2 x$ ve $\cos^2 x$ integralleri:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Kuvvet kuralı: u, x'in dif. fonksiyonu ve $n \neq -1$ rasyonel sayı ise

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx} \quad \text{(zincir kuralından)}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)dx = \int u^n \frac{du}{dx}dx \Rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \int u^n du.$$

$$\boxed{u,\ x\text{'in dif. fonksiyonu ve } n \neq -1, \text{ rasyonel ise } \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{ dir.}}$$

Örnek: a) $\int \sqrt{1+y^2}\,2y\,dy \left[\begin{array}{l} 1+y^2 = u \\ 2y\,dy = du \end{array}\right] = \int \sqrt{u}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$

$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + c$

b) $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx \left[\begin{array}{l} u = \tan x \\ du = \sec^2 x\,dx \end{array}\right] = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + c.$

Değişken Değiştirme: Zincir kuralını geriye çalıştırırsak;

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx \left[\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{array}\right] = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Örnek 1: $\int \cos(4x-5)dx \left[\begin{array}{l} u = 4x-5 \\ du = 4\,dx \end{array}\right] = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$

$= \frac{1}{4}\sin u + c = \frac{1}{4}\sin(4x-5) + c$

Örnek 2: $\int x^3 \sin x^4 \, dx \left[\begin{matrix} u=x^4 \\ du=4x^3dx \end{matrix}\right] = \frac{1}{4}\int \sin u \, du = -\frac{1}{4}\cos u + C$

$= -\frac{1}{4}\cos x^4 + C$

Örnek 3: $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \int \sec^2(3x)\, dx \left[\begin{matrix} u=3x \\ du=3dx \end{matrix}\right] = \frac{1}{3}\int \sec^2 u \, du$

$= \frac{1}{3}\tan u + C = \frac{1}{3}\tan(3x) + C.$

Örnek 4: $\int \frac{2z\, dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}} dz \left[\begin{matrix} u=z^2+1 \\ du=2z\,dz \end{matrix}\right] = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{2} u^{2/3} + C = \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$

Veya

$$\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}} dz \left[\begin{matrix} u^3=z^2+1 \\ 3u^2du=2z\,dz \end{matrix}\right] = \int \frac{3u^2du}{u} = 3\int u\,du = \frac{3}{2}u^2 + C = \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C$$

5.2 (Riemann Toplamları) Toplam Sembolü ve Sonlu Toplamların Limiti

Sigma Notasyonu: Sigma notasyonu, çok terimli toplamları, kompakt formda yazmamızı sağlar.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Yunan harfi büyük sigma Σ, "toplam" kelimesinin baş harfi olarak alınmıştır. Toplam indeksi, toplamın kaçtan başlayacağını ve üstündeki sayı (n) nerde bitecoğini gösterir.

Toplam sembolü $\sum_{k=1}^{n} a_k$

$n \to$ k indeksi $k=n$'de biter.

$a_k \to$ k. terimin formülü.

$1 \to$ k indeksi $k=1$'den başlar.

Örnek: a) $\sum_{k=1}^{7} k = 1+2+3+4+5+6+7.$

b) $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k k^2 = -1^2+(-1)^2 2^2+(-1)^3 3^2+(-1)^4 4^2 = -1+4-9+16.$

c) $\sum_{k=3}^{5} \frac{k}{k^2-1} = \frac{3}{3^2-1}+\frac{4}{4^2-1}+\frac{5}{5^2-1} = \frac{3}{8}+\frac{4}{15}+\frac{5}{24} = \sum_{k=0}^{2} \frac{k+3}{(k+3)^2-1} = \sum_{k=-4}^{-2} \frac{k+7}{(k+7)^2-1}$

d) $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=\sum_{i=1}^{100} f(i).$

Sonlu Toplamın Özellikleri:

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

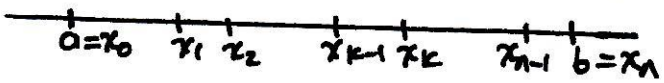
2) $\sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3) $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (c sabit)

4) $\sum_{k=1}^{n} c = n.c$ (c sabit)

Riemann Toplamları: Alman matematikçi, Georg Friedrich Bernhard Riemann tarafından inşası yapılan, belirli integralin sonlu toplamların limiti olarak tanımlanmasına ilişkin, ilk bilgileri verelim.

f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında tanımlı olsun. $[a,b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim. n alt aralığa



bölmek için a ve b arasında n-1 noktu seçmeliyiz. Bu noktalar

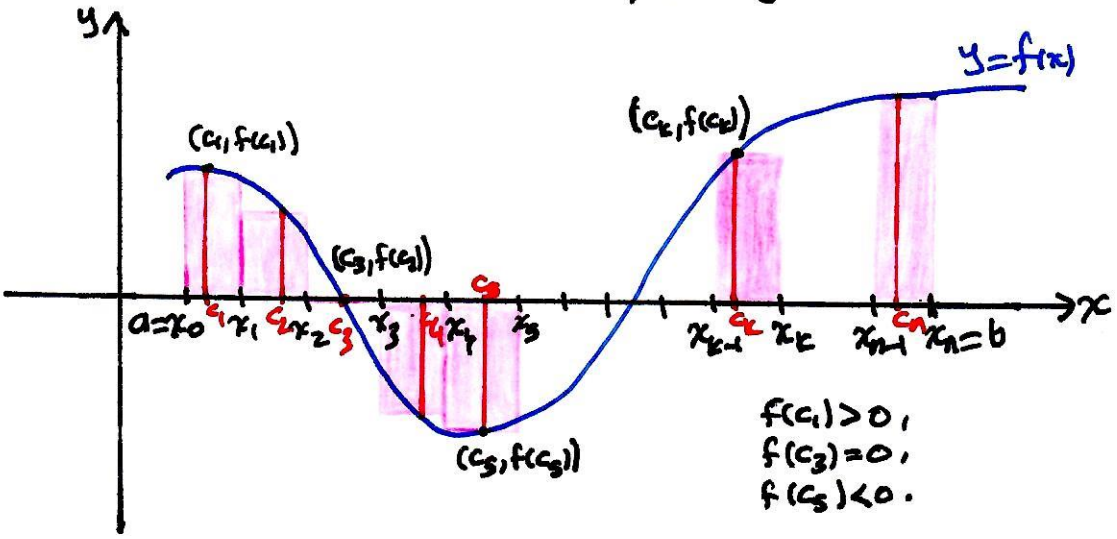
$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b$$

şeklinde olmalıdır.

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ şartını sağlayan $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_n\}$ kümesine $[a,b]$'nin bir <u>parçalanışı</u> denir. P parçalanışı, $[a,b]$ aralığını n tane kapalı

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,\ [x_{k-1},x_k],\ \cdots,\ [x_{n-1},x_n]$$

altaralıklara böler. <u>k. altaralık</u> $[x_{k-1},x_k]$ dır. k. altaralığın uzunluğunu $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ ile gösteriyoruz. Her alt aralıktan, keyfi c_k elemanı seçelim. ($c_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\cdots,n$). c_k noktalarında, $f(c_k)$'lar negatif, sıfır veya pozitif olabilirler. Her altaralıkta $f(c_k)\Delta x_k$ çarpımları, f pozitifse yüksekliği $f(c_k)$ genişliği Δx_k olan dikdörtgenin alanını, f sıfır ise sıfırı, f negatif ise eksi alanı verir.



Her altaralıktaki, $f(c_k)\Delta x_k$ çarpımlarının toplamı

$$S_n=S_P=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

toplamına, $[a,b]$ aralığında f'nin <u>Riemann toplamı</u> denir. Riemann toplamı P parçalanışı ve c_k'ların seçimine bağlıdır.

Parçalanışı, daha da incelttiğimizde (f pozitifse) dikdörtgenlerin alanları gittikçe, f fonksiyonu ile x-ekseni arasındaki alana daha da yaklaşacaktır. P parçalanışının <u>normu</u> $\|P\|$ ile gösterilir ve parçalanıştaki alt aralıkların en uzununu ifade eder. Parçalanışı, inceltmek $\|P\|$ normunu sıfıra yaklaştırmakla denktir. Bu ise n'yi sonsuza götürmek ile denktir. Yani $\|P\|\to 0 \iff n\to\infty$ dır.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3}$$

Örnek; $f(x) = 1-x^2$ fonksiyonunu, $[0,1]$ aralığında eşit parçalara bölerek ve c_k'ları aralıkların sağ uçları olarak, Riemann Toplamının limitini bulunuz.

$[0,1]$ aralığı n eşit parçaya bölünürse; $\Delta x_k = \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ ve alt-aralıklar

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$$

şeklinde olur.

k. altaralıkta $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2$ dir. Buna göre

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n - \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

5.3 Belirli İntegral

Tanım: $f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı olsun. $[a,b]$ üzerinde f'nin <u>belirli integrali</u>, aşağıdaki şartları sağlayan $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ Riemann toplamlarının limiti olan I sayısına denir.

Verilen herhangi $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, $\|P\|<\delta$ olmak üzere $[a,b]$'nin her $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ parçalanışı ve $[x_{k-1},x_k]$'da c_k'nın herhangi seçimi için $\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulunabilmesidir.

Daha çok bilinen yazım ile

$$I=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Leibniz notasyonları ile Yunan harfi Δ (fark), Roman harfi d (dif) ye limit durumda dönüşür: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$. Belirli integralde, Yunan harfi Σ, Roman harfi $\int$ (toplam), c_k'lar limit durumunda x'in kopisine, x'de a'dan b'ye sürekli devam eder. Bu yüzden, belirli integral $\int_a^b f(x)dx$ olarak gösterilir.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k}$$

Tanım sağlandığında, $[a,b]$ üzerinde Riemann toplamları $I=\int_a^b f(x)dx$ belirli integraline <u>yakınsar</u> denir ve f'ye $[a,b]$ üzerinde <u>integrallenebilir</u> denir. f integrallenebilirse, limit P ve c_k'ların seçimine bağlı değildir.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integral işareti ← $\int$; b → integrasyonun üst sınırı; $f(x)$ → integrand; dx → x integrasyon değişkeni; a → integrasyonun alt sınırı

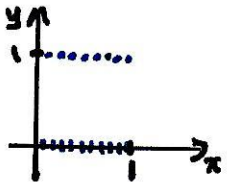
Belirli integralde, x değişkenine <u>yapay</u> (yapma, hayali) <u>değişken</u> denir.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(u)du$$

Teorem: Bütün sürekli fonksiyonlar integrallenebilirdir. Yani, f, $[a,b]$'de sürekli ise $[a,b]$ aralığında belirli integrali vardır.

f, sonlu sayıda sıçramalı süreksizliğe sahip isede, f integrallenebilirdir.

Örnek: $[0,1]$ üzerinde $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ rasyonel}\\ 0, & x \text{ irrasyonel}\end{cases}$ fonksiyonunun Riemann integrali yoktur.



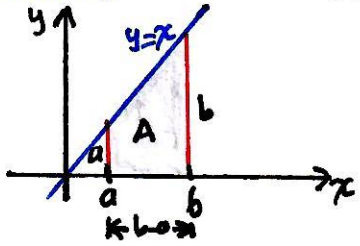
$[0,1]$'in herhangi bir P parçalanışında c_k'ları rasyonel sayılardan seçersek Riemann toplamı $\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = 1$ olacaktır. Eğer, c_k'ları irrasyonel seçersek Riemann toplamı $\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0$ olacaktır. Riemann toplamlarının limitleri c_k'ya bağlı olduğundan f integrallenemez.

Tanım: $y=f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığında negatif olmayan ve integrallenebilir ise $[a,b]$ üzerinde $y=f(x)$ eğrisi altında kalan alan, a'dan b'ye f'nin integralidir,

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

Bu tanım iki yönlü çalışır: Alanı hesaplamak için integrali kullanırız veya integrali hesaplamak için alanı bulurur.

Örnek: $0<a<b$ olmak üzere $\int_a^b x\,dx$ integralini hesaplayınız.



$\int_a^b x\,dx$, $y=x$ ile x-ekseni arasında kalan yamuğun alanıdır.

$$\int_a^b x\,dx = A = \frac{(a+b)}{2}(b-a) = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2} \text{ dir.}$$

Sürekli Fonksiyonların Ortalama Değeri

n tane sayının aritmetik ortalaması, sayıların toplamının n'ye bölünmesidir. $[a,b]$ kapalı aralığında, sürekli f fonksiyonunu düşünelim. $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim. Bu parçalanışta, her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_k=\Delta x=\frac{b-a}{n}$ dir. Her alt aralıktan c_k seçelim. n örneklenmiş değerin ortalaması

$$\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)=\frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

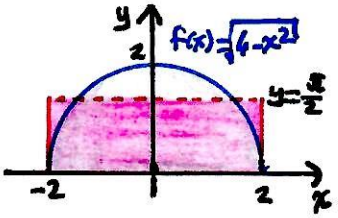
dır.

Tanım: $[a,b]$'de f integrallenebilirse, $[a,b]$'de f'nin ortalama değeri

$$\text{ort}(f)=\text{av}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir.

Örnek: $[-2,2]$ aralığında $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.



Yarım çember ile x-ekseni arasında kalan alan $A=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi 2^2}{2}=2\pi$ br^2 dir. Dolayısıyla,

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\pi$$

dir.

$$\text{ort}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Belirli İntegralin Kuralları:

1) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

2) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

3) $\int_a^b k f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ (k sabit), $\int_a^b -f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ ($k=-1$).

4) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$ (Toplamsallık özelliği)

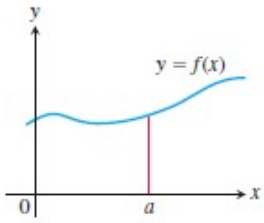
6) $[a,b]$ üzerinde f'nin maksimumu maksf ve minimumu minf ise
$$\text{minf}.(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le\text{maksf}.(b-a)$$
dır.

7) $[a,b]$ üzerinde $f(x)\ge g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$ dır.
" " $f(x)\ge 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$ dır.

Kanıt: (6) $[a,b]$'nin her P parçalanışı ve c_k noktalarının her seçimi için $\text{minf}\le f(c_k)\le\text{maksf}$ dır.

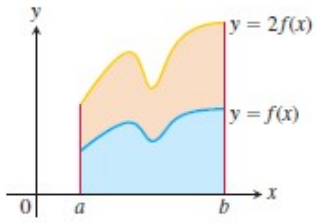
$$\text{minf}.(b-a)=\text{minf}.\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\text{minf}.\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}\text{maksf}.\Delta x_k=\text{maksf}.\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\text{maksf}.(b-a).$$

Kısaca, $\text{minf}.(b-a)\le\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k\le\text{maksf}.(b-a)$ eşitsizliğinin limitleri alınırsa $\text{minf}.(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le\text{maksf}.(b-a)$ elde edilir. ■



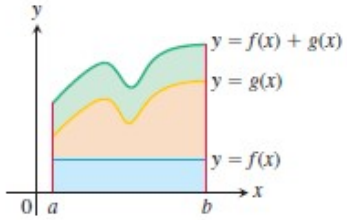
(a) *Zero Width Interval:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



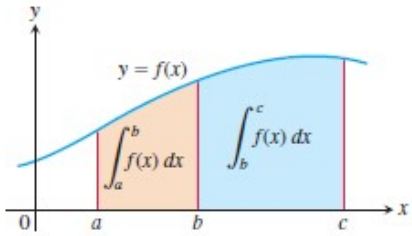
(b) *Constant Multiple:* $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$



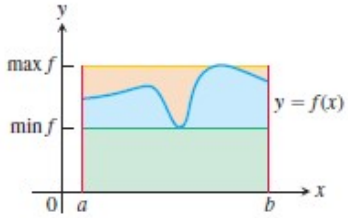
(c) *Sum: (areas add)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



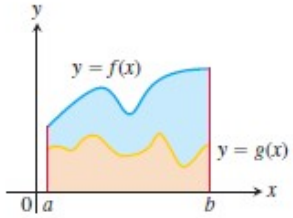
(d) *Additivity for Definite Integrals:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Max-Min Inequality:*

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a)$$



(f) *Domination:*

$f(x) \ge g(x)$ on $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

Örnek1: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5$, $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$ ise

a) $\int_{4}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{4} f(x)dx = -(-2) = 2$,

b) $\int_{-1}^{1} [3f(x) - 4h(x)]dx = 3\int_{-1}^{1} f(x)dx - 4\int_{-1}^{1} h(x)dx = 3.5 - 4.7 = -13$,

c) $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = 5 + (-2) = 3$ olarak bulunur.

Örnek2: $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$ 'in değerinin 3/2 'den küçük olduğunu gösteriniz.

Belirli integralin 6. kurallından (7. kurala görede yapılır) $\int_a^b f(x)dx \le$ maksf.(b-a) dır. $[0,1]$ üzerinde $\sqrt{1+\cos x} \le \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ dir. Buna göre

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \le \sqrt{2}\,(1-0) = \sqrt{2} \approx 1.414 < \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

5.4 Ortalama Değer Teoremi Ve Temel Teoremler

Bir önceki bölümde, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyonun ortalama değerini

$$ort(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olarak tanımlamıştık. Bu bölümde, belirli integraller için Ortalama Değer Teoremi (ODT), fonksiyonun bu ortalama değerini en az bir noktada aldığını gösterecek.

Belirli integraller için Ortalama Değer Teoremi (ODT):
f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise $[a,b]$'de öyle bir c noktası vardır ki

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

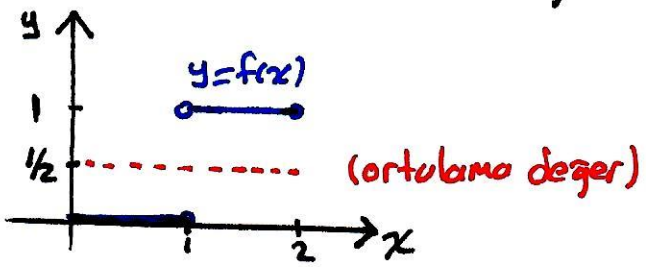
dir.

Kanıt: Belirli integralin 6. kuralından $\text{minf}.(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq \text{maks}.(b-a)$ olduğunu biliyoruz. Her tarafı $b-a>0$ sayısına bölersek;

$$\text{minf}\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq \text{maksf}$$

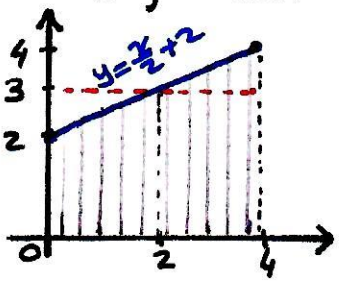
elde ederiz. f sürekli olduğundan aradeğer teoremine göre $f(x)$ fonksiyonu minf ile maksf arasındaki her değeri alır. Dolayısıyla $[a,b]$'de öyle bir c elemanı vardır ki $f(c)$, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ değerine eşittir. ∎

Burada f'nin sürekliliği önemlidir. f'nin süreksiz olması durumunda, f'nin ortalama değerine eşit olacak bir değer bulunmayabilir:



Örnek 1: $[0,4]$ aralığında $f(x)=\frac{x}{2}+2$ fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz. Verilen aralıkta f hangi noktada bu değeri alır.

$$\text{ort}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4-0}\int_0^4\left(\frac{x}{2}+2\right)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^4 dx=\frac{1}{8}\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)+\frac{1}{2}(4-0)$$
$$=3$$



$[0,4]$ aralığında $f(x)=\frac{x}{2}+2$'nin ortalama değeri 3'tür. Fonksiyon bu değeri $\frac{x}{2}+2=3 \Rightarrow x=2$'de alır.

Örnek 2: $a\neq b$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında f sürekli ve $\int_a^b f(x)dx=0$ ise $[a,b]$'de en az bir noktada $f(x)=0$ olduğunu gösteriniz.

$[a,b]$ aralığında f'nin ortalama değeri

$$\text{ort}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\cdot 0=0$$

dır. ODT göre $[a,b]$'de öyle bir c elemanı vardır ki $f(c)=0$ dır.

Temel Teoremler

Eğer $f(t)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyon ise herhangi bir sabitlenmiş a sayısından, başka bir x sayısına f'nin integrali yeni bir F fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyonun x'deki değeri

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

dir.

İntegral Hesabın Temel Teoremi, 1. Kısım:

$[a,b]$ aralığında f sürekli ise $[a,b]$ aralığında $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ süreklidir ve (a,b) aralığında diferansiyellenebilirdir. Türevi $f(x)$ dir, Yani

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

dir.

Kanıt: x ve $x+h$, (a,b)'de olmak üzere,

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

dir.

Belirli integraller için ODT göre x ile $x+h$ arasında öyle bir c değeri vardır ki

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)$$

dir. $h\to 0$ için $x+h$ x'e yaklaştığında c'de x'e yaklaşır. f, x'de sürekli olduğundan $f(c)$, $f(x)$'e yaklaşır. Sonuçta

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

elde edilir. a veya b'de tek taraflı limitler alınarak $[a,b]$'de F''nin sürekli olduğu gösterilir. ■

Bu teorem bize şunu söyler: eğer f sürekli ise ters türeve sahiptir. Yani integral ve türev işlemleri birbirinin ters işlemleridir.

Örnek 1: Temel teoremi kullanarak aşağıdaki türevleri bulunuz.

a) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt$ b) $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt$ c) $\frac{d}{dx}\int_x^{-3} 2t^2\cos t\,dt$

d) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sin t\,dt$ e) $\frac{d}{dx}\int_{1+x^2}^{\sin x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

a) $\frac{d}{dx}\int_a^x \sin t\,dt = \sin x.$

b) $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{1+x^4}.$

c) $\frac{d}{dx}\int_x^{-3} 2t^2\cos t\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_{-3}^x 2t^2\cos t\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\int_{-3}^x 2t^2\cos t\,dt = -2x^2\cos x.$

d) $y = \int_1^{x^3} \sin t\,dt \quad u = x^3, \quad y = \int_1^u \sin t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sin t\,dt = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du}\int_1^u \sin t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx} = \sin u\cdot(3x^2)$$
$$= 3x^2\sin x^3.$$

e) $\frac{d}{dx}\int_{1+x^2}^{\sin x}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} - \frac{2x}{2+2x^2+x^4}$ (ayrıntılar derste)

Örnek 2: $f(3)=5$ şartını sağlayan, türevi $\frac{dy}{dx}=\tan x$ olan, $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tanım aralığında bir $y=f(x)$ fonksiyonu bulunuz.

Temel teoremden $x=3$'deki değeri sıfır ve türevi $\tan x$ olan bir fonksiyonu kurmak kolaydır: $y=\int_3^x \tan t\,dt$. Bu fonksiyonun $x=3$'deki değeri 0 olduğundan, fonksiyonun değerinin 5 olması için 5'i eklememiz yeterlidir. Buna göre çözüm

$$f(x)=\int_3^x \tan t\,dt+5$$

dir.

İleride tam çözümün $y=\ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right|+5$ olacağını söyleyebiliriz.

İntegral Hesabın Temel Teoremi, 2. kısım:

$[a,b]$ aralığında f sürekli ve $[a,b]$'de f'nin herhangi bir ters türevi F ise

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

dır.

Kanıt: Temel Teoremin 1. kısmına göre f'nin bir ters türevi

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

dir. f'nin herhangi bir ters türevi F ise (a,b) aralığında bazı C'ler için $F(x)=G(x)+C$ dir. (Türevler için ODT'nin 2. sonucuna göre). F ve G, $[a,b]$'de sürekli olduğundan tek taraflı limitler alınarak $x=a$ ve $x=b$'de de $F(x)=G(x)+C$ olduğunu görürüz.

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= [G(b)+C]-[G(a)+C] \\ &= G(b)-G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

■

Temel Teoremin 2. kısmı, bir sürekli f fonksiyonunun bir ters türevini bulabiliyorsak, Riemann toplamını ve limitini hesaplamaksızın, integralin değerini bulabileceğimizi söyler.

Örnek 1: a) $\int_{-2}^{1}(1+x^2)dx$ integralini hesaplayınız.

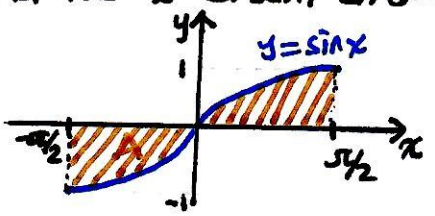
$1+x^2$'nin en basit ters türevi $x+\frac{x^3}{3}$ dür. Bu yüzden

$$\int_{-2}^{1}(1+x^2)\,dx = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(1+\frac{1^3}{3}\right)-\left(-2+\frac{(-2)^3}{3}\right) = \frac{18}{3}$$

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

c) $\int_{-\pi/4}^{0}\sec x\tan x\,dx = \sec x\,\Big|_{-\pi/4}^{0} = \sec 0-\sec(-\pi/4) = 1-\sqrt{2}$

Örnek 2: a) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ aralığında $y=\sin x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

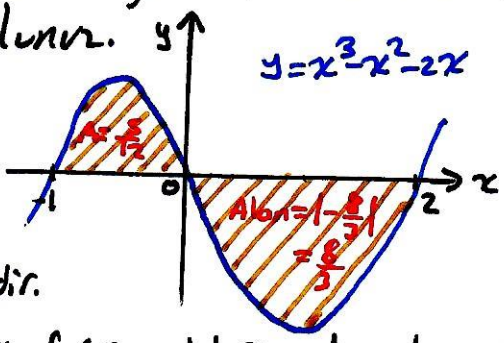


$[-\frac{\pi}{2},0]$ aralığında $f\le 0$ ve $[0,\frac{\pi}{2}]$ aralığında $f\ge 0$ olduğundan bu aralıklarda integral alıp mutlak değerini hesaplamamız gerekir.

$$\int_{-\pi/2}^{0}\sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_{-\pi/2}^{0} = -1 \quad , \quad \int_{0}^{\pi/2}\sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_{0}^{\pi/2} = 1.$$

Toplam alan $= |-1|+1 = 2$ br^2.

b) $[-1,2]$ aralığında $f(x)=x^3-x^2-2x$ fonksiyonu ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



Önce fonksiyonun sıfırlarını bulmamız gerekir.

$$f(x)=x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x+1)(x-2)$$

dolayısıyla sıfırlar $x=0$, $x=-1$ ve $x=2$ dir.

$[-1,0]$ aralığında $f\ge 0$ ve $[0,2]$ aralığında $f\le 0$ olduğundan bu aralıklarda integrali hesaplayıp, sonra alanı bulmak için mutlak değerini almalıyız.

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{12} \ ,$$

$$\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)_{0}^{2} = -\frac{8}{3}.$$

Toplam alan $= \frac{5}{12}+\left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$ br^2.

5.6 Belirli İntegrallerde Değişken Değiştirme ve Eğriler Arasındaki Alanlar

Değişken değiştirme ile bir belirli integrali hesaplamanın iki yöntemi vardır. Birinci yöntem, belirsiz integrali değişken değiştirme ile hesoplayıp daha sonra Temel Teoremi kullanarak belirli integrali hesaplamaktır. İkinci yöntem ise:

Teorem: $[a,b]$ aralığında g' sürekli ve g'nin görüntü kümesi üzerinde f sürekli ise
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$
dur.

Kanıt: f'nin herhangi bir ters türevi F olsun. Bu durumda
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx \begin{bmatrix} u=g(x) \\ du=g'(x)dx \end{bmatrix} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad \text{dur.}$$
$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))g'(x) \Rightarrow \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{b}$$
$$= F(g(b)) - F(g(a))$$
$$= F(u)\Big|_{u=g(a)}^{g(b)}$$
$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$
■

Örnek 1: $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ integralini hesoplayınız.

Bu sorıyı iki yöntem ile çözelim.

1. Yöntem: $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \begin{bmatrix} u=x^3+1 \\ du=3x^2dx \end{bmatrix} = \int_{u=0}^{2} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

2. Yöntem: $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \begin{bmatrix} u=x^3+1 \\ du=3x^2dx \end{bmatrix} = \int\sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}+c = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}+c$

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Örnek 2: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\csc^2\theta\,d\theta \begin{bmatrix} u=\cot\theta \\ du=-\csc^2\theta\,d\theta \end{bmatrix} = \int_1^0 u(-du)$
$$= -\int_1^0 u\,du$$
$$= \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Teorem: $[-a,a]$ simetrik aralığında f sürekli ise

a) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$,

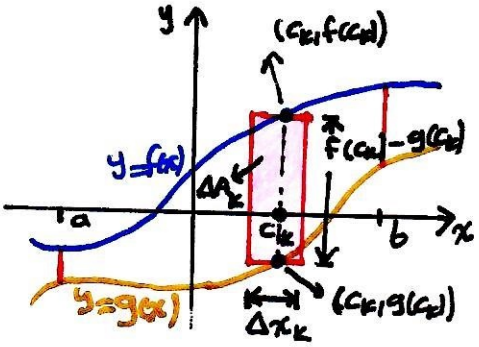
b) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

dır.

Örnek: a) $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx = 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{16}{3}$

b) $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0.$

Eğriler Arasındaki Alanlar



Üstten ve alttan $y=f(x)$ ile $y=g(x)$ eğrileri, soldan ve sağdan $x=a$ ile $x=b$ doğruları tarafından sınırlı bölgenin alanını bulmak isteyelim.

$[a,b]$ aralığının bir parçalanışı $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olsun. k. altaralığa karşı gelen k. dikdörtgenin alanı $\Delta A_k = [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k$ dır. $\|P\|\to 0$ için $\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ Riemann toplamı bölgenin alanını verecektir. f ve g sürekli ise $A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)-g(c_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx.$

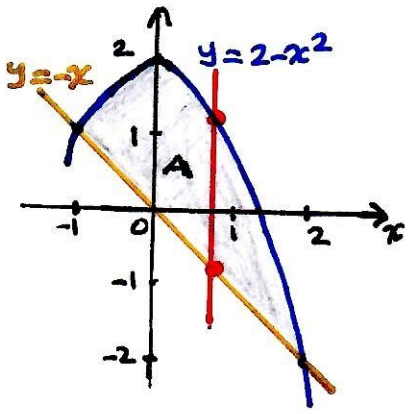
Tanım: Eğriler Arasındaki Alan

$[a,b]$ aralığında f ve g sürekli fonksiyonlar ve $f(x) \geq g(x)$ ise a'dan b'ye $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanı a'dan b'ye $(f-g)$'nin integralidir. Yani

$$A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

dir.

Örnek 1: $y=2-x^2$ parabolü ve $y=-x$ doğrusu tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.

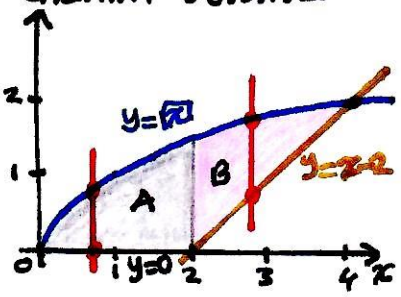


Önce iki eğrinin kesişim noktalarını bulmamız gerekir: $2-x^2=-x \Rightarrow x^2-x-2=0$ $(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=-1$ ve $x=2$. İntegrasyon sınırları $a=-1$ ve $b=2$ dir.

$$A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_{-1}^{2} [2-x^2-(-x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2+x-x^2)\,dx = \left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\ br^2.$$

Örnek 2: Birinci dörttebir bölgede, üstten $y=\sqrt{x}$, altton x-ekseni ve $y=x-2$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



Bölgenin üst sınırı $f(x)=\sqrt{x}$ dir. Alt sınırları $0\le x\le 2$ aralığında $g(x)=0$ ve $2\le x\le 4$ aralığında $g(x)=x-2$ dir. Bölgeyi, A ve B iki alt bölgeye ayırmalıyız.

A bölgesi için integrasyon sınırları $a=0$ ve $b=2$ dir.

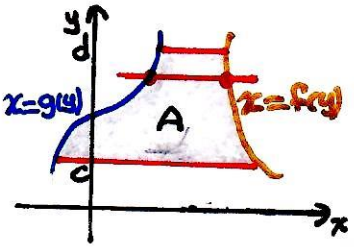
$$A=\int_0^2[\sqrt{x}-0]\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ br^2$$

B bölgesi için integrasyon sınırları: $a=2$ dir. b'yi bulmak için $\sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1, x=4$ $(y>0)$ $b=4$ dür.

$$B=\int_2^4[\sqrt{x}-(x-2)]\,dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_2^4=\left(\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)br^2$$

Bölgenin alanı $=A+B=\frac{10}{3}\ br^2$.

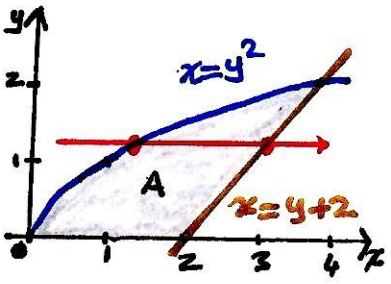
Bölgenin sınırlarındaki eğriler, y'nin fonksiyonları olarak tanımlanmışsa A bölgesinin alanını



$$\boxed{A=\int_c^d[f(y)-g(y)]\,dy}$$

formülü ile bulurz.

Örnek: Yukardaki örneği (örnek 2) y'ye göre integre ederek çözünüz.



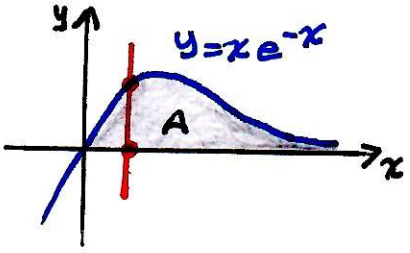
Bölgede integrasyonun alt sınırı $c=0$ dır. Üst sınırı bulmak için

$y^2=y+2 \Rightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow (y+1)(y-2)=0 \Rightarrow$

$y=-1$, $y=2$ ($y>0$ olduğundan) $d=2$ dir.

$$A=\int_c^d[f(y)-g(y)]\,dy=\int_0^2[y+2-y^2]\,dy=\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{10}{3}\ br^2.$$

Örnek: $[0,\infty)$ aralığında $y=xe^{-x}$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

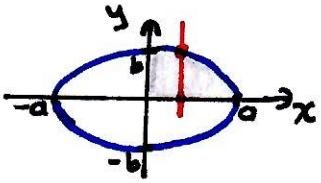


$$A=\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

$$\int xe^{-x}dx \left[\begin{matrix} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=-e^{-x}\end{matrix}\right]=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+c.$$

$$A=\int_0^\infty xe^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right|_0^b$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[-be^{-b}-e^{-b}-(0-1)\right]=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-b}{e^b}\right)-0+1$$
$$=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{e^b}+1=1 \text{ br}^2.$$

Örnek: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin alanını bulunuz.



Bölge her iki eksene göre simetrik olduğundan toplam alan A, birinci dörttebir bölgedeki alanın dört katıdır. $y\geq 0$ için denklemi çözersek $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow$ $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $0\leq x\leq a$ dır.

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx \left[\begin{matrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt\end{matrix}\right]=4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t\,dt$$
$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=4ab\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right|_0^{\pi/2}$$
$$=\pi ab \text{ br}^2.$$

(Eğer $a=b=r$ ise r yarıçaplı bir çemberin alanı πr^2 olarak bulunur).